

2007 年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄に受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は 0 点となることがあります。
4. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
6. この冊子は 20 頁です。落丁、乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は、記入の有無にかかわらず、持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

1 a を正の実数とする。2 次関数 $f(x) = ax^2 - 2(a+1)x + 1$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 2$ の範囲で $y = f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

2 n を奇数とする。次の問いに答えよ。

(1) $n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2) $n^5 - n$ は 3 の倍数であることを証明せよ。

3 C_1 を半径 1 の円とし, C_2 を C_1 に外接している半径 2 の円とする。 C を円 C_1 と円 C_2 の両方に外接している半径 r の円とする。円 C の中心を A , 円 C_1 の中心を B , C_1 と C_2 の接点を O とし, $\angle AOB$ を θ とする。

- (1) $r = 3$ のとき $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (2) 線分 AO の長さを r を用いて表せ。

4 1 から 7 までの番号が書かれた 7 枚のカードがある。この中から 4 枚のカードを同時に取り出す。取り出されたカードに書かれた 4 個の数の和から、取り出されなかった 3 枚のカードに書かれた 3 個の数の和を引いた値を X とする。

- (1) $X = -8$ となる確率を求めよ。
- (2) X が負となる確率を求めよ。
- (3) X の期待値を求めよ。

- 5 a を実数とする。 x についての方程式 $|x^2 + ax + 2a| = a + 1$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めよ。

- 6 平面上で $AB = 3$ となる 2 点 A, B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし、点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C, D は円 S 上を動き、2 点 E, F は円 T 上を動く。ただし、線分 CD は点 A を通り、線分 EF は点 B を通る。このとき内積 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DF}$ の最大値と最小値を求めよ。

7

n を奇数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを証明せよ。
- (2) $n^5 - n$ は 3 の倍数であることを証明せよ。
- (3) $n^5 - n$ は 120 の倍数であることを証明せよ。

8 x の関数

$$f(x) = \int_{x-2}^{x+2} |y(y-5)| dy$$

の $2 \leq x$ における最小値を求めよ。

9 e を自然対数の底とし, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\log_e|x| + \frac{3}{4}$ とする。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の 2 接線で, 互いに垂直であるものをすべて求めよ。
- (2) 直線 ℓ は曲線 $y = f(x)$ の接線で, 原点を通りかつ傾きが正とする。 ℓ の方程式は $y = x$ であることを示せ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = e$, $y = x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

10 媒介変数表示 $x = \cos \theta$, $y = \cos^2 \theta \cdot \tan \frac{\theta}{2}$ (ただし, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) が表す曲線を C とする。

- (1) y を最大にする θ の値を α とするとき, $\cos \alpha$ の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

11 初項 a , 公差 d の等差数列を $\{a_n\}$ とし, 初項 b , 公比 r の等比数列を $\{b_n\}$ とする。ただし $bd \neq 0$, $r \neq 0, 1$ とする。数列 $\{b_n\}$ の各項は数列 $\{a_n\}$ のどれかの項と一致するものと仮定し, 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = \frac{b_n - a}{d}$ で定める。

(1) c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は 0 以上の整数であることを示せ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ は

$$c_{n+1} - rc_n = c_2 - rc_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすことを示せ。

(3) r が有理数であることを示せ。

(4) c_n ($n = 3, 4, 5, \dots$) を c_1, c_2, r を用いて表せ。

(5) r は整数であることを示せ。

