2006年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は16頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ $\triangle$ABC において，$\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{BC} = 5\sin A$，$\mathrm{CA} = 3$ であるとする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) $\triangle$ABC の内接円の半径を求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle$ABC において，AB $= 2$，AC $= 3$，$A = 60^\circ$ のとき，辺 AC 上に AD $= 1$ となる点 D をとる。さらに E を辺 BC 上の点とする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 線分 DE が $\triangle$ABC の面積を二等分するとき，線分 BE の長さを求めよ。

(3) $\triangle$ABE と $\triangle$DEC の面積の積 T を最大にする線分 BE の長さと，そのときの T の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 実数 a に対し，2 次関数 $f(x) = x^2 - ax - a^2 + 5a$ を考える。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つような a の範囲を求めよ。

(2) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ を通り，$1 \leqq \alpha < \beta \leqq 3$ となるような a の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ 1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。この中からカードを 3 枚同時に取り出す。取り出された 3 枚のカードに書かれた 3 つの整数のうち，最大のものを除いた残りの 2 つの整数の和を X とする。

(1) $X = 3$ である確率を求めよ。

(2) X の期待値を求めよ。

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leqq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

また $g(x) = -x^2 + ax + b$ とする。$y = g(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1) a，b の値を求めよ。

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{6}$ $\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおき，

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2}, \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{3}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

とする。辺 AB 上に点 P_1 をとる。ただし P_1 は A，B とは異なるとする。P_1 から辺 OB に垂線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ を下ろす。次に，Q_1 から辺 OA に垂線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$ を下ろす。さらに，R_1 から辺 AB に垂線 $\mathrm{R}_1\mathrm{P}_2$ を下ろす。以下，同様の操作を続けて，点 P_n，Q_n，R_n（$n = 1, 2, 3, \cdots$）を定める。$\overrightarrow{\mathrm{AP}_n} = t_n(\vec{b} - \vec{a})$ により t_n（$0 < t_n < 1$）を定める。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BQ}_1}$ を t_1 と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) t_2 を t_1 を用いて表せ。

(3) t_n を t_1 と n を用いて表せ。

(4) $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$ となるような t_1 の値を求めよ。

(5) $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$ のとき，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$ の面積を求めよ。

$\boxed{7}$ $a \neq 0$，$b \neq 0$ とする。$f(x) = a\cos^2 x + b\cos x + c$ について，$y = f(x)$ のグラフが x 軸と原点で接しているとする。

(1) $y = f(x)$ のグラフが x 軸と接する点の x 座標をすべて求めよ。

(2) さらに $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ が成り立っているとき，$f(x) = 0$（$0 \leqq x \leqq 2\pi$）をみたす x の値をすべて求めよ。

$\boxed{8}$ a，t を実数とするとき，座標平面において，

$$x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - a) = 0$$

で定義される図形 C を考える。

(1) すべての t に対して C が円であるような a の範囲を求めよ。ただし，点は円と見なさないものとする。

(2) $a = 4$ とする。t が $t > 0$ の範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

(3) $a = 6$ とする。t が $t > 0$ であって，かつ C が円であるような範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

$\boxed{9}$ a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を以下のように定義する。

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

すべての自然数 n に対し $a_n \neq 0$ となるような a の範囲を求めよ。