2005年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は28頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ x は正の実数とし，$x^2+4x-1=0$ を満たす。

$$A=1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3, \quad B=(1+x)^3$$

とおくとき，$\dfrac{A}{B}$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ a は実数とし，x に関する 2 次方程式 $x^2 + ax + (a-1)^2 = 0$ は相異なる 2 つの実数解をもつ。

(1) 2 つの解の差の平方を a を用いて表せ。

(2) 2 つの解の差が整数であるとき a を求めよ。

$\boxed{3}$ 1から5までの数字が書かれたカードが，それぞれ2枚ずつ，合わせて10枚ある。この中からカードを2枚同時に取り出し，その数字を X，Y とする。ただし，$X \leqq Y$ とする。

(1) $X = Y$ となる確率を求めよ。

(2) $X = 3$ となる確率を求めよ。

(3) X の期待値を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1 = 2$，$a_2 = 4$ である。

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (n = 1,\, 2,\, \cdots)$$

とおくとき，$\{b_n\}$ は正の公比をもつ等比数列とする。

(1) $\dfrac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}}$ を，b_n，b_{n+1} を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} \frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = -1456$ が成り立つとき

(i) 一般項 b_n を求めよ。

(ii) 一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{5}$ a は実数とする。2 つの曲線

$$y = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4 \quad と \quad y = ax^2 - 2a^2x - 3a$$

は，ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。

$\boxed{6}$ a を 1 と異なる正の定数とするとき，次の不等式を満たす $(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。

$$a^{2x} - a^{2y} - a^{2x+y} + a^{x+2y} - a^{x} + a^{y} < 0$$

$\boxed{7}$

(1) 次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$\log_{10}(-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1) \geqq \log_{10}(-2x^2+2x+1)$$

(2) x，y が (1) の不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{8}$ 関数 $f(x) = 3\cos 2x + 7\cos x$ について，$\displaystyle\int_0^{\pi} |\, f(x)\,|\, dx$ を求めよ。

$\boxed{9}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $A^3 = E$ となるための必要十分条件を，a，b を用いて表せ。

(2) (1) の条件が成立するとき，すべての自然数 k（$k = 1, 2, \cdots$）に対して

$$A^{2^k} + A^{2^{k-1}} + E = O$$

であることを示せ。

$\boxed{10}$ 以下において $\log x$ は自然対数を表す。

(1) $a > \dfrac{1}{e}$ のとき，$x > 0$ に対し $x^a > \log x$ であることを示せ。

(2) $a > \dfrac{1}{e}$ のとき，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x^a \log x = 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $0 < t < \dfrac{1}{e}$ として，曲線 $y = x \log x$（$t \leqq x \leqq 1$）および x 軸と直線 $x = t$ で囲まれた部分を，y 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を $V(t)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{t \to +0} V(t)$ を求めよ。

$\boxed{11}$ n は自然数とし，2^n は 100 桁の数で，2^{n-1} は 99 桁の数である。

(1) n を求めよ。

(2) 2^n の一の位の数字を求めよ。

(3) 2^n の十の位の数字を求めよ。

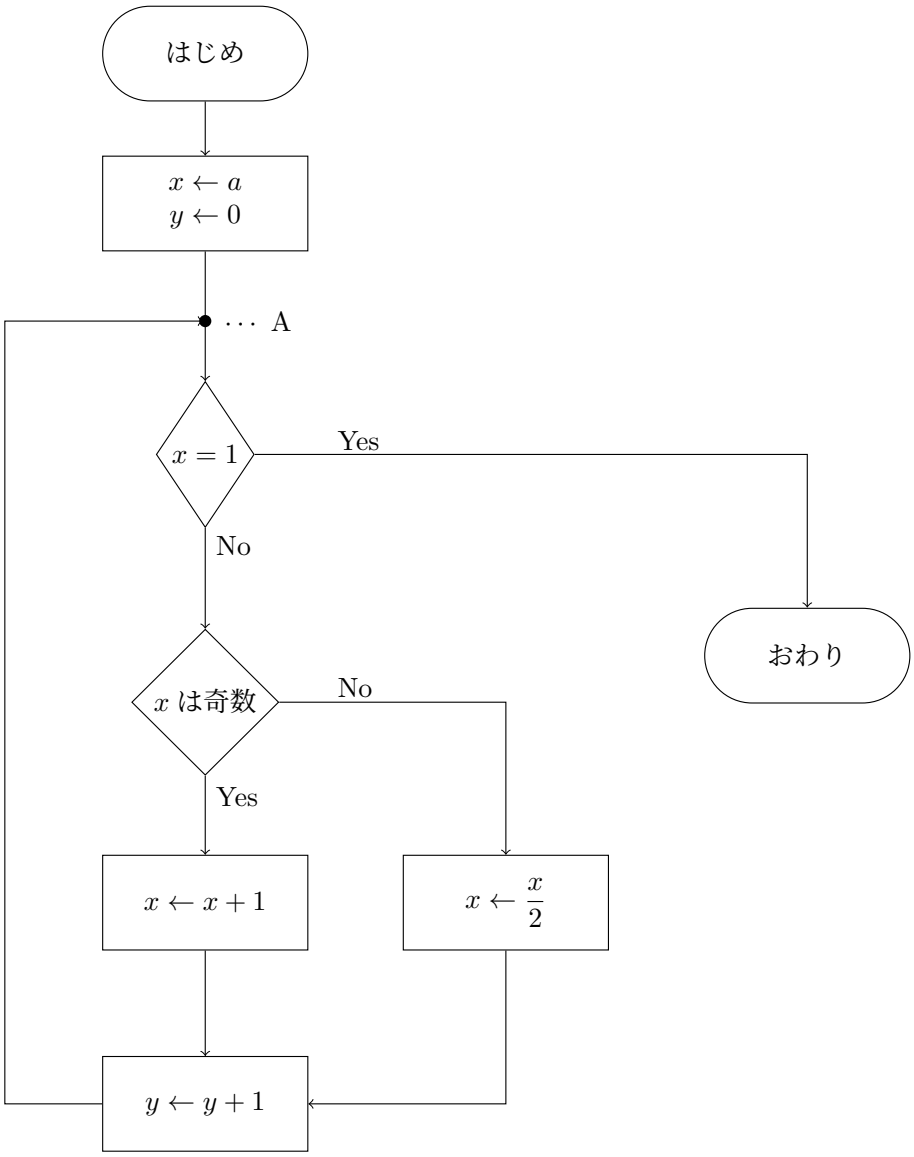
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ としてよい。

$\boxed{12}$ – $\boxed{\textbf{ア}}$ a，k は正の整数とする。次頁の流れ図のプログラムを実行する。

(1) $a = 5, 6, 7, 8$ のそれぞれの場合に，このプログラム実行開始から終了までの A 点における x，y の値の表を作成せよ。

(2) $a = 9$ のとき，このプログラム実行開始から終了までの A 点における x の値を 2 進法で表示せよ。

(3) $a = 2^k + 1$ であるとき，プログラム終了時の y の値を k を用いて表せ。


はじめ
$x \leftarrow a$
$y \leftarrow 0$
$\cdots$ A
$x = 1$
Yes
No
おわり
x は奇数
No
Yes
$x \leftarrow x + 1$
$x \leftarrow \frac{x}{2}$
$y \leftarrow y + 1$

$\boxed{12}$ - $\boxed{\text{イ}}$ α は絶対値 1 の複素数とし，複素数 z に対して，$w = \dfrac{\overline{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で，z が原点と点 α を通る直線上（ただし，点 $\dfrac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき，w を表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で，z が不等式 $|z| > 1$ を満たすとき，複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。

$\boxed{13}$ – $\boxed{\textbf{ア}}$ 12 枚のカードがある。このうち 4 枚のカードには数字 0 が書いてあり，残り 8 枚のカードには数字 1 が書いてある。この 12 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出す。このとき，取り出したカードの数字を X，Y，Z とおく。ただし，$X \leqq Y \leqq Z$ とする。

(1) $X = 1$ となる確率 $P(X = 1)$ を求めよ。

(2) $X + Y + Z$ の期待値 $E(X + Y + Z)$ と分散 $V(X + Y + Z)$ を求めよ。

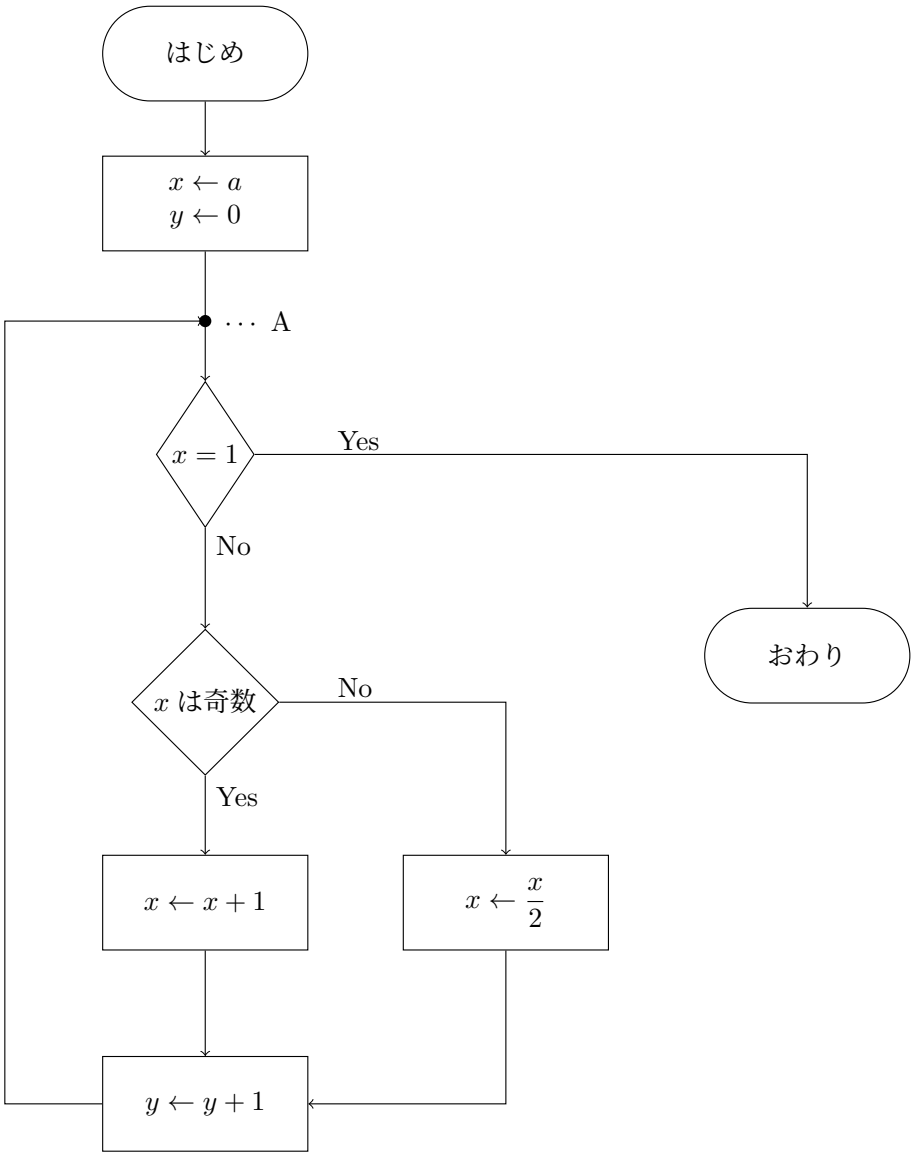
(3) $Y = 0$ であるとき，$Z = 1$ となる条件つき確率を求めよ。

13 – イ　a，k は正の整数とする。次頁の流れ図のプログラムを実行する。

(1)　$a = 5, 6, 7, 8$ のそれぞれの場合に，このプログラム実行開始から終了までの A 点における x，y の値の表を作成せよ。

(2)　$a = 9$ のとき，このプログラム実行開始から終了までの A 点における x の値を 2 進法で表示せよ。

(3)　$a = 2^k + 1$ であるとき，プログラム終了時の y の値を k を用いて表せ。


はじめ
$x \leftarrow a$
$y \leftarrow 0$
$\cdots$ A
$x = 1$
Yes
No
おわり
x は奇数
No
Yes
$x \leftarrow x + 1$
$x \leftarrow \frac{x}{2}$
$y \leftarrow y + 1$

$\boxed{13}$ - $\boxed{\textbf{ウ}}$ α は絶対値 1 の複素数とし，複素数 z に対して，$w = \dfrac{\overline{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で，z が原点と点 α を通る直線上（ただし，点 $\dfrac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき，w を表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で，z が不等式 $|z| > 1$ を満たすとき，複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。