2004年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は24頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 整式 $x^4 + ax^3 + ax^2 + bx - 6$ が整式 $x^2 - 2x + 1$ で割り切れるとき a, b の値を求めよ。

2 24 枚からなるカードの組がある。この組のそれぞれのカードには 1 から 6 までの数がひとつ書かれており，各数についてそれぞれ 4 枚ずつある。この組から 2 枚のカードを同時に引く。

(1) 2 枚のカードの数が同じになる確率を求めよ。

(2) 2 枚のカードの数の差が 3 以上となる確率を求めよ。

(3) 2 枚のカードの数の和の期待値を求めよ。

$\boxed{3}$ 正の数 a を初項とする公差 3 の等差数列を $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ とし，

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$$

とする。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，S_n を a と n を用いて表せ。

(3) 100 以上のすべての n に対して

$$S_n \geqq \frac{1}{3a+1}$$

が成立する a の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$ 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき，AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし，AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

(1) AD の長さが $\dfrac{3}{4}$ であるとき，r の値を求めよ。

(2) AD の長さを x とおくとき，r^2 を x の式で表せ。

(3) $\angle \mathrm{DME} = \theta$ とおくとき，$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = ax^2 + bx + c$$

とし，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) b，c を a を用いて表せ。

(2) $f(x) - g(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。

$\boxed{6}$ $0 < t < 1$ とする。2 次方程式

$$x^2 - 2tx + 1 = 0$$

の解のひとつを α とする。複素数平面上の 4 点を O(0)，A(−1)，B(1)，P(α) とし，AB を直径とする円を C とする。点 A を通り OP に平行な直線が円 C と交わる A 以外の点を Q とする。

(1) $|\alpha|$ を求めよ。

(2) 四角形 ABPQ の面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ。

$\boxed{7}$ xy 平面上の動点 A は原点 O $(0,\ 0)$ を出発し，x 軸上を点 $(2,\ 0)$ まで動くとする。また動点 B は点 $(0,\ 1)$ を出発し，$\mathrm{AB} = \mathrm{OB} = 1$ なる条件を満たしながら第 1 象限内を点 $(1,\ 0)$ まで動くとする。点 P は線分 AB 上の点で $2\mathrm{BP} = \mathrm{OA}$ を満たす。

(1) $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とするとき，点 P の座標を θ で表せ。ただし点 A が点 O と一致するときを除く。

(2) 点 P の軌跡と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{8}$ n を自然数とする。n 次多項式 $P_n(x)$ は，$n+1$ 個の整数 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して

$$P_n(k) = 2^k - 1$$

を満たす。

(1) $P_2(x) - P_1(x)$ および $P_3(x) - P_2(x)$ を因数分解せよ。

(2) $P_n(x)$ を求めよ。

$\boxed{9}$ N を自然数とする。

$$a_1 = N, \quad a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(a_n + \left\lfloor \frac{N}{a_n} \right\rfloor\right) \right\rfloor \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ について以下の問いに答えよ。ここで $\lfloor x \rfloor$ は x をこえない最大の整数を表す。

(1) $a_n \geqq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ を証明せよ。

(2) $a_n \leqq a_{n+1}$ ならば $a_n = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ であることを証明せよ。

$\boxed{10}$ – $\boxed{\textbf{ア}}$ xyz 空間内に点 A $(1,\ 1,\ 2)$ と点 B $(-5,\ 4,\ 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{10}$ – $\boxed{\text{イ}}$ x を実数とするとき，$\lfloor x \rfloor$ は x をこえない最大の整数を表す。

(1) 整数 $\left\lfloor \dfrac{2^{10}}{10} \right\rfloor$ を 2 進法で表せ。

(2) 次の手続きを考える。

> (i) 初期値設定 $\mathrm{b} \leftarrow f(a)$，$\mathrm{s} \leftarrow 0$ を行う。
>
> (ii) 次の枠内を $\mathrm{b} < c$ となるまで繰り返す:
>
> $\boxed{\mathrm{s} \leftarrow \mathrm{s} + \mathrm{b},\ \mathrm{b} \leftarrow g(\mathrm{b} * r) \text{ を順次実行する。}}$
>
> (iii) 上の繰り返し終了後 $\mathrm{t} \leftarrow h(\mathrm{s})$ を行う。

定数 a, r, c と関数 f, g, h をそれぞれ $a = \dfrac{1}{10}$, $r = \dfrac{1}{2}$, $c = 1$, $f(x) = \lfloor 2^{10}x \rfloor$, $g(x) = \lfloor x \rfloor$，$h(x) = 2^{-10}x$ として上の手続きを実行する。このとき (ii) の繰り返しの回数と，実行後の t の値を求めよ。

$\boxed{11}$ – $\boxed{\textbf{ア}}$ xyz 空間内に点 A $(1,\ 1,\ 2)$ と点 B $(-5,\ 4,\ 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{11}$ – $\boxed{\text{イ}}$ x を実数とするとき，$\lfloor x \rfloor$ は x をこえない最大の整数を表す。

(1) 整数 $\left\lfloor \dfrac{2^{10}}{10} \right\rfloor$ を 2 進法で表せ。

(2) 次の手続きを考える。

> (i) 初期値設定 $\mathrm{b} \leftarrow f(a)$，$\mathrm{s} \leftarrow 0$ を行う。
>
> (ii) 次の枠内を $\mathrm{b} < c$ となるまで繰り返す:
>
> $\boxed{\mathrm{s} \leftarrow \mathrm{s} + \mathrm{b},\ \mathrm{b} \leftarrow g(\mathrm{b} * r) \text{ を順次実行する。}}$
>
> (iii) 上の繰り返し終了後 $\mathrm{t} \leftarrow h(\mathrm{s})$ を行う。

定数 a, r, c と関数 f, g, h をそれぞれ $a = \dfrac{1}{10}$, $r = \dfrac{1}{2}$, $c = 1$, $f(x) = \lfloor 2^{10}x \rfloor$, $g(x) = \lfloor x \rfloor$，$h(x) = 2^{-10}x$ として上の手続きを実行する。このとき (ii) の繰り返しの回数と，実行後の t の値を求めよ。

$\boxed{11}$ – $\boxed{\textbf{ウ}}$ 52 枚からなるカードの組がある。この組のそれぞれのカードには 1 から 13 までの数がひとつ書かれており，各数についてそれぞれ 4 枚ずつある。この組から 1 枚目のカードを引き，そのカードに書かれている数を X とする。次にこのカードをもとへ戻さずに 2 枚目のカードを引き，そのカードに書かれている数を Y とする。X，Y のうちの大きい方の数を Z とする。ただし 2 つの数が同じ場合は，その数を Z とする。

(1) $\mathrm{X} = i$ $(i = 1, 2, \cdots, 13)$ のとき，$\mathrm{Y} = j$ $(j = 1, 2, \cdots, 13)$ となる条件つき確率を求めよ。

(2) $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ となる確率を求めよ。

(3) Z の期待値を求めよ。