

2003 年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄に受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は 0 点となることがあります。
4. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
6. この冊子は 32 頁です。落丁、乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は、記入の有無にかかわらず、持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

1

放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 2 だけ平行移動したところ、
放物線

$$y = x^2 + 2(2 - a)x + 2(1 - 2a)$$

が得られた。ただし、 a は定数である。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が $1 \leq x \leq 4$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような a の値の範囲を求めよ。

2

三角形 ABC において、 $\angle A$ の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D とする。

- (1) $AB : AC = BD : DC$ を証明せよ。
- (2) $AB = 2$, $AC = 4$, $AD = 1$ のとき、辺 BC の長さと三角形 ABC の面積を求めよ。

3 n 枚のカードの表に $1, 2, \dots, n$ の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして、よくまぜ、重ねて、上から順に $1, 2, \dots, n$ の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする。

- (1) p_3 を求めよ。
- (2) $n = 4$ のとき、表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ。
- (3) p_5 を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2$$

$$a_n = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

で定める。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^n k^2 a_k$ を求めよ。

- 5 放物線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 A, B は, 直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\frac{1}{6}$ になる, という条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき, 直線 AB が通りうる点の範囲を求め, 図示せよ。

6

R を平面上の凸 6 角形とし、その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。
 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ とおく。 R が $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$, $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$ を満たすとする。

- (1) $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$ であることを示せ。
- (2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき、 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の間の関係を求めよ。
- (3) R が (2) の条件を満たし、さらに内積に関して $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ を満たすとき、 R の面積を求めよ。

7

実数 t に対して、 u の 3 次方程式 $u^3 - 3u + 2t = 0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1) 媒介変数 t を用いて

$$x = f(t), \quad y = -2t \quad (t \text{ は実数})$$

と表される曲線を図示せよ。

(2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め、 $f(t)$ のグラフをかけ。

8

 n を自然数とする。関数

$$f(x) = (1 - \tan^4 x) \tan^n x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積が $\frac{2}{35}$ であるとき、 $f(x)$ の最大値を求めよ。

9

関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して定義され、すべての実数 x で微分可能であるとする。このとき、以下の命題について、正しいければ証明し、正しくないければ反例をあげよ。

- (1) $x_1 < x_2$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとする。このとき、すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ である。
- (2) $f(0) = 0$ かつ、すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ である。
- (3) $f(0) = 0$ かつ、すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty$ である。

10 a は定数とし, n は 2 以上の整数とする。関数

$$f(x) = ax^n \log x - ax \quad (x > 0)$$

の最小値が -1 のとき, 定積分

$$\int_1^e f(x) dx$$

の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。

11 p を素数とする。 x に関する 2 次方程式

$$px^2 + (5 - p^2)x - 3p = 0$$

が整数の解を持つのは $p = 2$ のときに限ることを示せ。

12

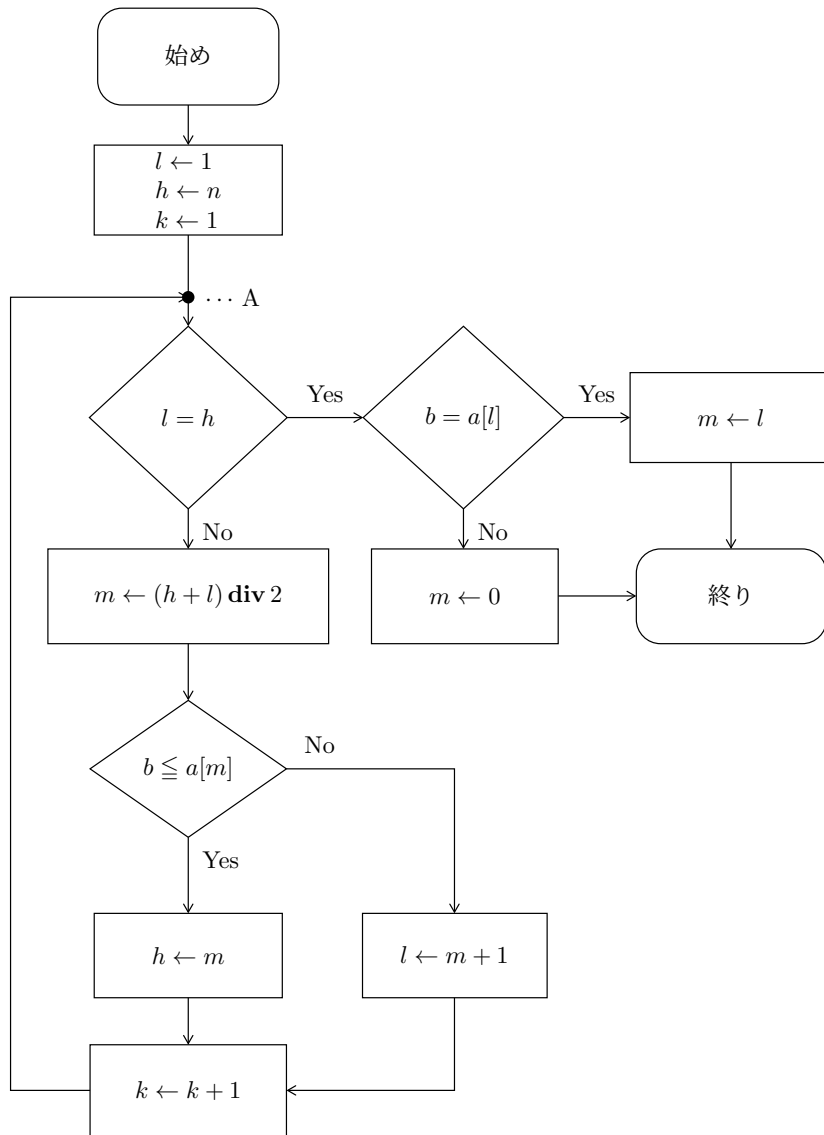
ア

配列 (添え字付き変数) a において, $a[1], a[2], \dots, a[n]$ には異なる整数の値が小さい順に入っている。このとき, 次頁の流れ図は値 b が

$$a[1], a[2], \dots, a[n]$$

の中に現れるかどうかを判定し, 現れたら $b = a[m]$ となる m を返し, 現われなければ 0 を返すプログラムに対応している。そのプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし, $(h+l) \text{ div } 2$ は $h+l$ を 2 で割った商の整数部分を表している。

- (1) $n = 16$ とし, $a[5] < b < a[6]$ であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの, 流れ図中の A 点における k, l, h の値の表を作成せよ。
- (2) ある自然数 p に対して $n = 2^p$ と表せるとき, A 点で成立している k, l, h, p の関係式を求め, プログラムが終了したときの k を p を使って表せ。ただし, 証明は述べなくてよい。



12

イ

R を平面上の凸 6 角形とし、その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ とおく。 R が $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$, $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$ を満たすとする。

- (1) $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$ であることを示せ。
- (2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき、 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の間の関係を求めよ。
- (3) R が (2) の条件を満たし、さらに内積に関して $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ を満たすとき、 R の面積を求めよ。

- 13 – ア a を実数とし、 z を複素数とする。複素数平面上で、 a, z, z^2, z^3 が表す 4 点が、ある正方形の 4 頂点になるとする。ただし、 a と z^2 が表す頂点是对角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。

13

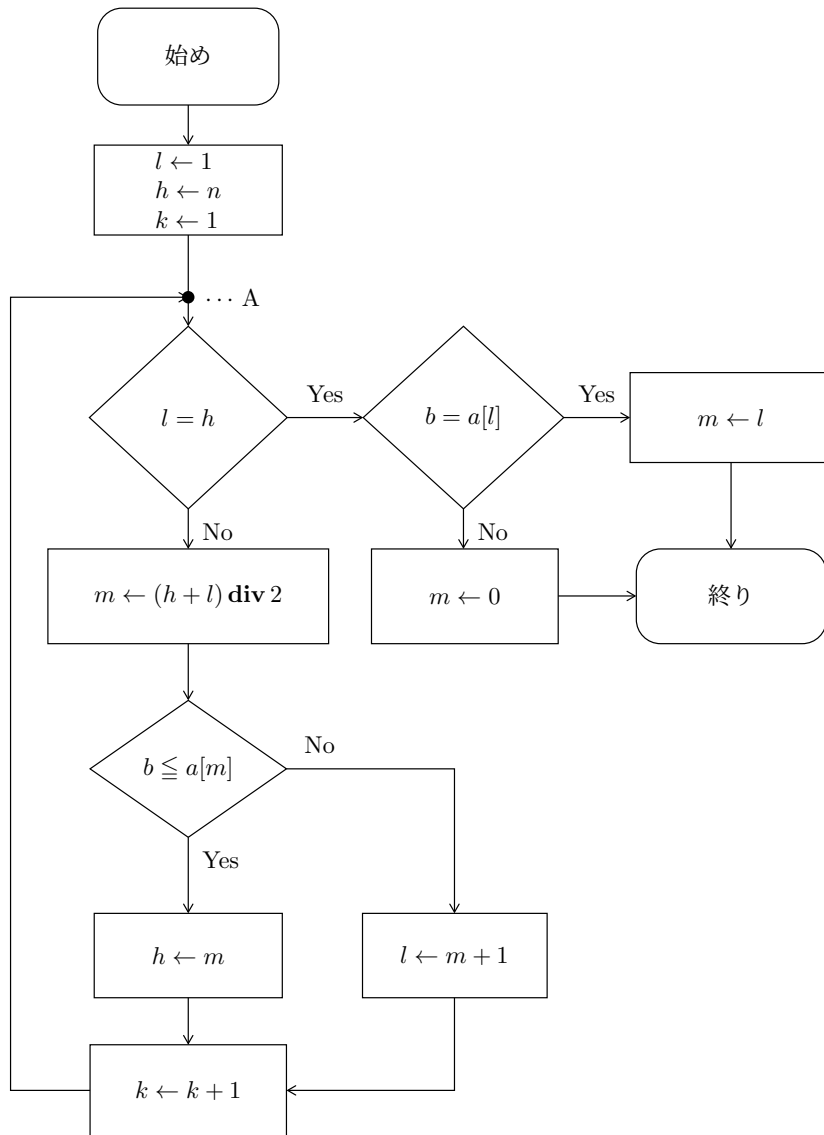
イ

配列 (添え字付き変数) a において, $a[1], a[2], \dots, a[n]$ には異なる整数の値が小さい順に入っている。このとき, 次頁の流れ図は値 b が

$$a[1], a[2], \dots, a[n]$$

の中に現れるかどうかを判定し, 現れたら $b = a[m]$ となる m を返し, 現われなければ 0 を返すプログラムに対応している。そのプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし, $(h+l) \text{ div } 2$ は $h+l$ を 2 で割った商の整数部分を表している。

- (1) $n = 16$ とし, $a[5] < b < a[6]$ であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの, 流れ図中の A 点における k, l, h の値の表を作成せよ。
- (2) ある自然数 p に対して $n = 2^p$ と表せるとき, A 点で成立している k, l, h, p の関係式を求め, プログラムが終了したときの k を p を使って表せ。ただし, 証明は述べなくてよい。



13 – ウ n 枚のカードの表に $1, 2, \dots, n$ の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして、よくまぜ、重ねて、上から順に $1, 2, \dots, n$ の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数を X とする。

- (1) $n = 4$ のとき、 X の期待値を求めよ。
- (2) $n = 5$ のとき、 $X = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $n = 5$ のとき、条件 $X \geq 1$ の下で、 $X = 1$ となる条件つき確率を求めよ。

- 14 – ア a を実数とし、 z を複素数とする。複素数平面上で、 a, z, z^2, z^3 が表す4点が、あるひし形の4頂点になるとする。ただし、 a と z^2 が表す頂点是对角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。

14

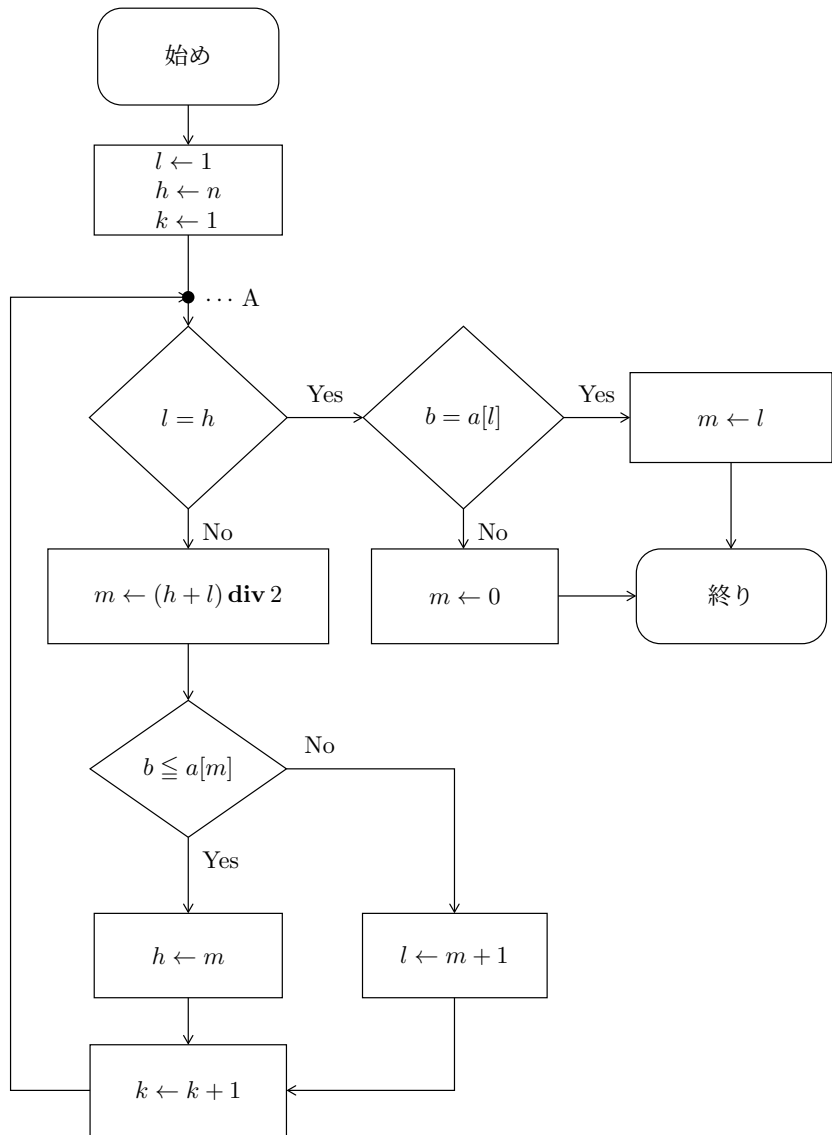
イ

配列 (添え字付き変数) a において, $a[1], a[2], \dots, a[n]$ には異なる整数の値が小さい順に入っている。このとき, 次頁の流れ図は値 b が

$$a[1], a[2], \dots, a[n]$$

の中に現れるかどうかを判定し, 現れたら $b = a[m]$ となる m を返し, 現われなければ 0 を返すプログラムに対応している。そのプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし, $(h+l) \text{ div } 2$ は $h+l$ を 2 で割った商の整数部分を表している。

- (1) $n = 16$ とし, $a[5] < b < a[6]$ であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの, 流れ図中の A 点における k, l, h の値の表を作成せよ。
- (2) ある自然数 p に対して $n = 2^p$ と表せるとき, A 点で成立している k, l, h, p の関係式を求め, プログラムが終了したときの k を p を使って表せ。ただし, 証明は述べなくてよい。



14

ウ

k を整数とし q を実数とする。A, B の 2 人が次のようなゲームを行う。まず A が 3 枚の硬貨を投げ、表の出た枚数を X とする。 $X > k$ なら A の勝ち、 $X < k$ なら B の勝ちとする。 $X = k$ のときは当たる確率が q のくじを A が引き、当たれば A の勝ち、そうでなければ B の勝ちとする。A, B とも、勝った場合には $X + 1$ 円の賞金がもらえ、負けた場合には何ももらえない (0 円もらう) とする。ここで k および q の値は、A と B のもらう賞金の期待値が等しくなるように定める。

- (1) k と q の値を求めよ。
- (2) 上のゲームを 2 回行ったとき、B の賞金総額が 3 円であった。このとき、A の賞金総額も 3 円である条件付き確率を求めよ。

