2002年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
4. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
6. この冊子は28頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ k を実数とし，$f(x) = x^2 - kx + 3k$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数を調べよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ が表す放物線の頂点の y 座標が 1 以上となるような最大の整数 k を求めよ。

$\boxed{2}$ 直角三角形 $\mathrm{OP_1Q_1}$, $\mathrm{OP_2Q_2}$, $\mathrm{OP_3Q_3}$, $\cdots$ がある。ただし各 n について，$\angle\mathrm{O}$ は直角で，$\angle\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ は n に無関係で一定な角 θ である。一辺 OP_n の長さを a_n とおくと，$\{a_n\}$ は初項 1，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列をなすとする。

このとき次の問いに答えよ。

(1) 辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ の長さを n と θ を用いて表せ。

(2) 斜辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ を一辺とする正方形の面積を S_n とするとき，

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

を n と θ を用いて表せ。

(3) S_n を (2) のように定めるとき，

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 90$$

をみたす角 θ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上に，中心がそれぞれ点 $(0,\ 1)$，点 $(2,\ 1)$ で，同じ半径 1 をもつ 2 つの円 C_1 と C_2 がある。次の問いに答えよ。

(1) 2 円 C_1，C_2 と x 軸に接するように円 C_3 を描く。このとき円 C_3 の中心の座標を求めよ。

(2) さらに，2 円 C_1，C_3 と x 軸に接するように円 C_2 とは異なる円 C_4 を描く。このとき円 C_4 の中心の座標を求めよ。

$\boxed{4}$ 1から9までの番号が書かれたカードがそれぞれ1枚ずつある。この9枚のカードをよくきって重ねた後，上から3枚のカードを順に左から並べて，3桁の数を作る。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 3桁の数が500以上である確率を求めよ。

(2) 3桁の数が500以上の偶数である確率を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし，空の箱があってもよいとする。

(1) 赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

(2) 赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

(3) 赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

$\boxed{6}$ 実数 t に対して，$f(t)$ を

$$f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx|\, dx$$

と定める。$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。

$\boxed{7}$ 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し,

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = \overrightarrow{0}$$

をみたしている。このとき次の問いに答えよ。

(1) 直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2) 四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。

$\boxed{8}$ 座標空間内に 2 点 A $(1,\ 0,\ 0)$ と B $(-1,\ 0,\ 0)$ がある。不等式

$$\angle \mathrm{APB} \geqq 135^\circ$$

をみたす空間内の点 P の全体の集合に，2 点 A，B をつけ加えてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{9}$ 行列 E と A を

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく。行列 $xE - A$ が逆行列をもたないような x の 2 つの値を α，β（$\alpha > \beta$）とし，行列 P，Q を

$$P = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 3 \\ 2 & \alpha - 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta + 1 & 3 \\ 2 & \beta - 4 \end{pmatrix}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 行列の積 PQ を計算せよ。

(2) 自然数 n に対して，P^n を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して，

$$A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$$

が成立することを示せ。

$\boxed{10}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(2) n が正の整数のとき，$\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。

$\boxed{11}$ n を 2 以上の整数とし，

$$I(x) = \int_0^x \sin t \, \sin nt \, dt \qquad (x \geqq 0)$$

と定める。

(1) $n = 2$ のとき，$I(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $I(x)$ の最大値が

$$\frac{n}{n^2 - 1}$$

であるならば，n は偶数であることを証明せよ。

$\boxed{12}$ 無限数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c$$
$$a_{n+1} = \frac{{a_n}^2 - 1}{n} \quad (n \geqq 1)$$

で定める。ここで c は定数とする。

(1) $c = 2$ のとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) $c \geqq 2$ ならば，$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ となることを示せ。

(3) $c = \sqrt{2}$ のとき，$\lim_{n \to \infty} a_n$ の値を求めよ。

$\boxed{13}$ - $\boxed{\textbf{ア}}$

次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上で方程式

$$|z-3i|=2|z|$$

が表す図形を求め，図示せよ。

(2) 複素数 z が (1) で求めた図形の上を動くとき，複素数

$$w=(-1+i)z$$

が表す点の軌跡を求め，図示せよ。

13 - イ

配列（添え字付き変数）a において，$a[0], a[1], a[2], \cdots, a[n]$ には，異なる整数の値が入っている。このとき，次頁の流れ図は

$$a[1], a[2], \cdots, a[n]$$

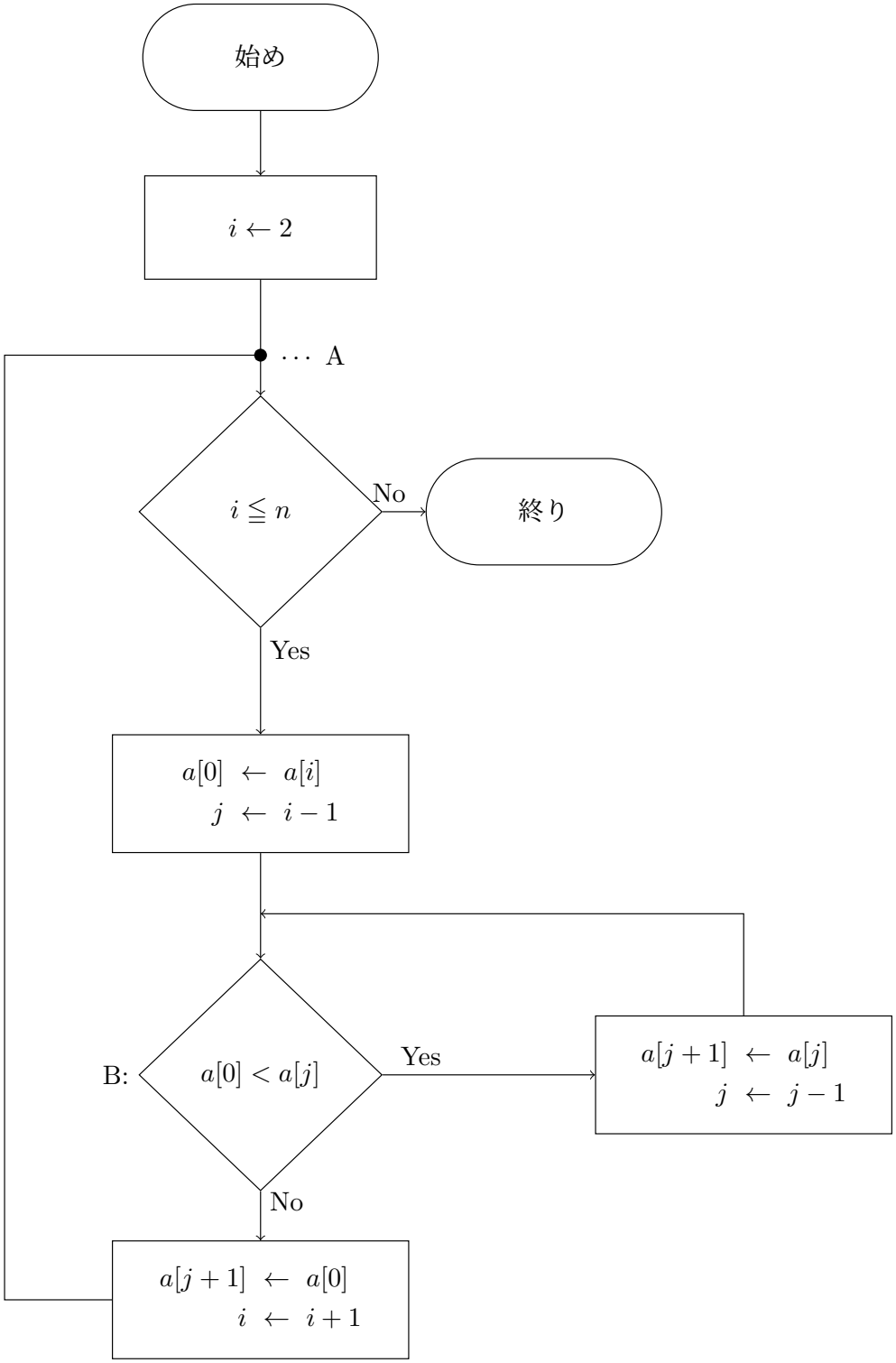
の値を小さい順に並べかえるプログラムに対応している。このプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし，長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする。

(1) $n = 4$ とし，「始め」においては

$$a[0] = 0, \quad a[1] = 5, \quad a[2] = 2, \quad a[3] = 7, \quad a[4] = 3$$

であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの，A 点における i の値と $a[k]$（$k = 0, 1, 2, 3, 4$）の値の表を作成せよ。

(2) B 点の判定 $a[0] < a[j]$ の回数は，$a[k]$（$k = 1, 2, \cdots, n$）の初期値により異なる。この判定回数がもっとも少ない場合の判定の回数を自然数 n を用いて表せ。またそのような $a[k]$（$k = 1, 2, \cdots, n$）の初期値の例を示せ。ただし，いずれも証明を述べなくてよい。


始め
$i \leftarrow 2$
$\cdots$ A
$i \leqq n$
No
終り
Yes
$a[0] \leftarrow a[i]$
$j \leftarrow i-1$
B:
$a[0] < a[j]$
Yes
$a[j+1] \leftarrow a[j]$
$j \leftarrow j-1$
No
$a[j+1] \leftarrow a[0]$
$i \leftarrow i+1$

$\boxed{14}$ - $\boxed{\textbf{ア}}$

次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上で方程式

$$|z-3i|=2|z|$$

が表す図形を求め，図示せよ。

(2) 複素数 z が (1) で求めた図形から $z=i$ を除いた部分を動くとき，複素数 $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ で表される点の軌跡を求め，図示せよ。

14 - イ

配列（添え字付き変数）a において，$a[0], a[1], a[2], \cdots, a[n]$ には異なる整数の値が入っている。このとき，次頁の流れ図は

$$a[1], a[2], \cdots, a[n]$$

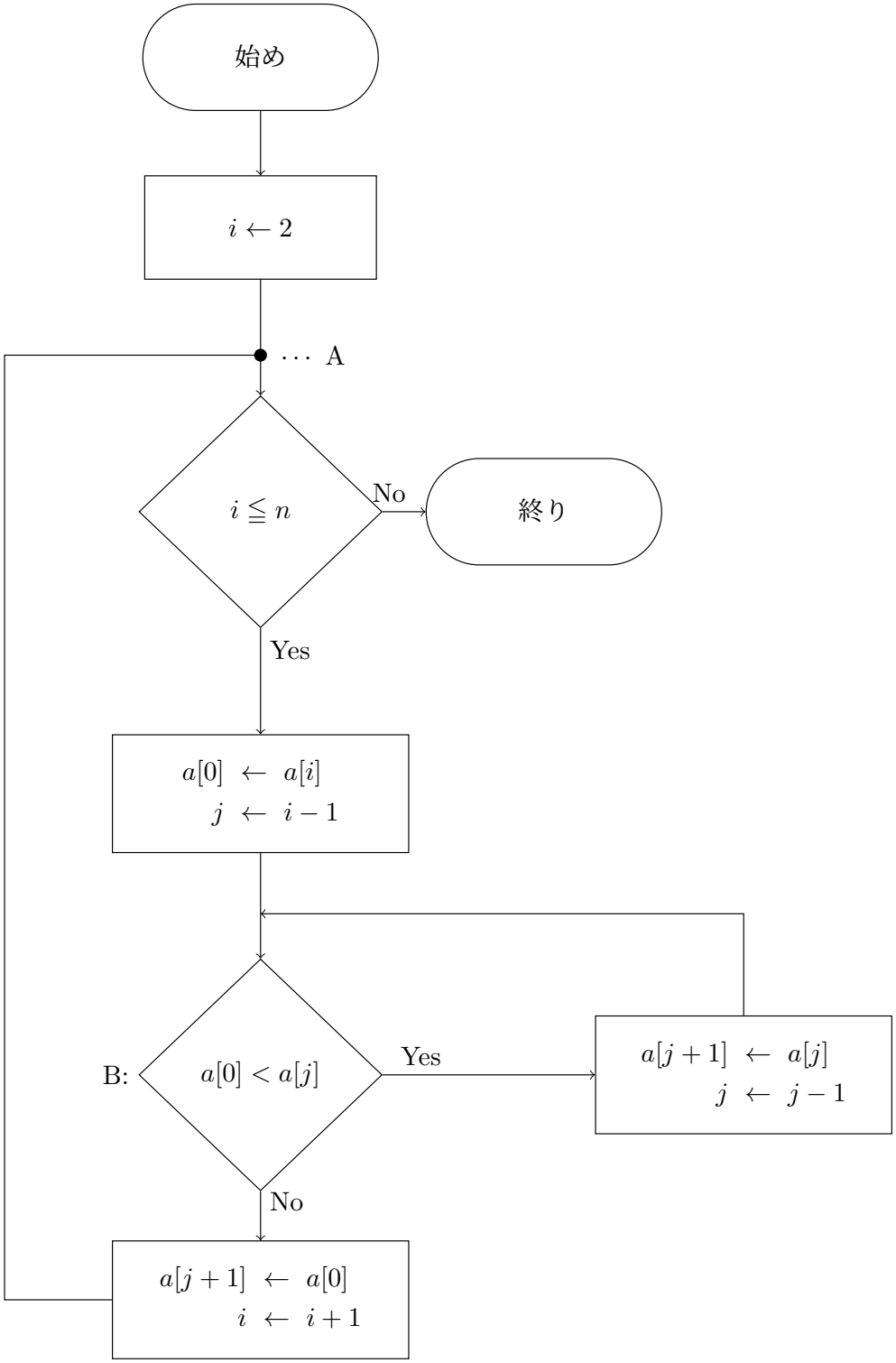
の値を小さい順に並べかえるプログラムに対応している。そのプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし，長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする。

(1) $n = 4$ とし，「始め」においては

$$a[0] = 0, \quad a[1] = 5, \quad a[2] = 2, \quad a[3] = 7, \quad a[4] = 3$$

であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの，A 点における i の値と $a[k]$（$k = 0, 1, 2, 3, 4$）の値の表を作成せよ。

(2) B 点の判定 $a[0] < a[j]$ の回数は，$a[k]$（$k = 1, 2, \cdots, n$）の初期値により異なる。この判定回数がもっとも少ない場合と，もっとも多い場合について，それぞれ判定の回数を自然数 n を用いて表せ。またそれぞれの場合に対応する $a[k]$（$k = 1, 2, \cdots, n$）の初期値の例を示せ。ただし，いずれも証明を述べなくてよい。


始め
$i \leftarrow 2$
$\cdots$ A
$i \leqq n$
No
終り
Yes
$a[0] \leftarrow a[i]$
$j \leftarrow i-1$
B:
$a[0] < a[j]$
Yes
$a[j+1] \leftarrow a[j]$
$j \leftarrow j-1$
No
$a[j+1] \leftarrow a[0]$
$i \leftarrow i+1$

$\boxed{14}$ - $\boxed{\textbf{ウ}}$

1 から 10 までの番号が書かれた札が 1 枚ずつある。この 10 枚の札から無作為に 5 枚の札を取り出す。このとき，取り出された札のうち，番号が 5 以下であるものの枚数を X とおく。次の問いに答えよ。

(1) X の確率分布を求めよ。

(2) X の平均 $E[X]$ および分散 $V[X]$ を求めよ。

(3) $X = 5$ のときは 10,000 円，$X = 4$ のときは 1,000 円，$X = 3$ のときは 100 円の賞金がもらえるが，その他の場合はもらえないものとする。賞金の期待値を求めよ。