

2001 年度入学者選抜学力検査問題

# 数 学

## 注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄に受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
3. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は 0 点となることがあります。
4. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
5. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
6. この冊子は 20 頁です。落丁、乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
7. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
8. 解答用紙は、記入の有無にかかわらず、持ち帰ってはいけません。
9. この冊子は持ち帰りなさい。





|   |
|---|
| 1 |
|---|

以下の問いに答えよ。

(1)  $n$  を自然数とする。このとき、 $n^2$  を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを証明せよ。

(2) 3 つの自然数  $a, b, c$  が

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たしている。このとき、 $a, b$  の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。

2 実数  $a$  に対して

$$f(x) = ax^2 - 2ax + a^2 + 1$$

とおく。

(1) 定積分

$$I(a) = \int_1^2 f(x) dx$$

を  $a$  を用いて表せ。

(2)  $f(x)$  が条件  $f(1) \leq 1$  を満たすような  $a$  の範囲を求めよ。

(3)  $a$  が (2) の範囲を動くとき、 $I(a)$  の最大値および最小値を求めよ。

- 3  $a, b$  を整数とする。3 次関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$  が,  $0 < x < 2$  の範囲で  
極大値と極小値をもつとき,  $a, b$  の値を求めよ。

4 2次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ( $a, b, c, d$  は実数) に対して, 実数  $f(A)$  を  $f(A) = a + d$  と定義する。これについて性質

$$f(A \pm B) = f(A) \pm f(B) \quad (\text{複号同順})$$

は証明なしで使ってよい。

- (1) 2次正方行列  $A, B$  に対して,  $f(AB) = f(BA)$  を証明せよ。
- (2) 2次正方行列  $P, Q$  が  $P = PQ - QP$  を満たしているとする。このとき,  $f(P) = 0$  を証明せよ。
- (3) (2) の  $P$  に対して,  $f(P^2) = 0$  を証明せよ。
- (4) (2) の  $P$  に対して,  $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  を証明せよ。

- 5  $C$  は、2 次関数  $y = x^2$  のグラフを平行移動した放物線で、頂点が円  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  上にある。原点から  $C$  に引いた接線で傾きが正のものを  $\ell$  とおく。このとき、 $C$  と  $\ell$  の接点の  $x$  座標が最大および最小になるときの  $C$  の頂点の座標をそれぞれ求めよ。

6  $a, b$  を実数,  $e$  を自然対数の底とする。すべての実数  $x$  に対して  $e^x \geq ax + b$  が成立するとき, 以下の問いに答えよ。

(1)  $a, b$  の満たすべき条件を求めよ。

(2) 次の定積分

$$\int_0^1 (e^x - ax - b) dx$$

の最小値と, そのときの  $a, b$  の値を求めよ。

7

数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  を次のように定義する。

$$a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) すべての自然数  $n$  に対して

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

8

30 の階乗  $30!$  について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $2^k$  が  $30!$  を割り切るような最大の自然数  $k$  を求めよ。
- (2)  $30!$  の一の位は 0 である。ここから始めて十の位、百の位と順に左に見ていく。最初に 0 でない数字が現れるまでに、連続していくつの 0 が並ぶかを答えよ。
- (3) (2) において、最初に現れる 0 でない数字は何であることを理由とともに答えよ。

9 – ア  $i$  を虚数単位とし、複素数  $z$  に共役な複素数を  $\bar{z}$  で表す。

- (1)  $a$  を実数の定数とする。条件

$$1 - \bar{z} = (a + i)(z - \bar{z})$$

を満たす複素数平面上の点  $z$  の全体が直線であるとき、 $a$  の値を求めよ。

- (2) 実軸上にない複素数  $\alpha$  に対して、3 点  $0, 1, \alpha$  を通る複素数平面上の円の中心を  $\beta$  とする。このとき、 $\beta$  を  $\alpha$  と  $\bar{\alpha}$  を用いて表せ。
- (3)  $\alpha, \beta$  を (2) の複素数とする。点  $\alpha$  が (1) の直線上を動くとき、 $\frac{\beta}{\alpha}$  は一定であることを証明せよ。

9

イ

正の整数  $x$  と  $y$  が与えられたとき、以下の手順による計算を行う。

1.  $n \leftarrow x, \quad m \leftarrow y, \quad q \leftarrow 0$
2.  $m > 0$  かつ  $q \leq 2$  を満たしている限り、次の計算を繰り返し実行する。ただし、 $n$  を  $m$  で割った商を  $n \operatorname{div} m$ , 余りを  $n \operatorname{mod} m$  で表す。
  - 2-1.  $q \leftarrow n \operatorname{div} m, \quad r \leftarrow n \operatorname{mod} m$
  - 2-2.  $n \leftarrow m, \quad m \leftarrow r$
3.  $q > 2$  ならば 0 を、そうでなければ  $n$  の値を出力する。

この手順に関して、以下の問いに答えよ。

- (1)  $x$  を 95,  $y$  を 35 としたとき、手順 2 の各繰り返しにおいて 2-1 を実行する直前での変数  $n, m, q$  の値の変化を示す表を作成し、手順 3 で出力される数を示せ。
- (2) 変数  $n, m$  の値をそれぞれ  $x_2, x_1$  とし、その状態で 2-1 と 2-2 を続けて実行したところ、変数  $m, q$  の値がそれぞれ  $x_0, z$  になったとする。このとき、 $x_2$  を  $x_1, x_0, z$  を使って表せ。
- (3)  $x$  と  $y$  の両方が 200 以上でかつ出力が 7 になるような  $x$  と  $y$  を 1 組あげ、その組について (1) と同様の表を作成せよ。

10

— ア

$i$  を虚数単位とし、複素数  $z$  に共役な複素数を  $\bar{z}$  で表す。

- (1)  $a$  を実数の定数とする。条件

$$1 - \bar{z} = (a + i)(z - \bar{z})$$

を満たす複素数平面上の点  $z$  の全体が直線であるとき、 $a$  の値を求めよ。

- (2) 実軸上にない複素数  $\alpha$  に対して、3 点  $0, 1, \alpha$  を通る複素数平面上の円の中心を  $\beta$  とする。このとき、 $\beta$  を  $\alpha$  と  $\bar{\alpha}$  を用いて表せ。
- (3)  $\alpha, \beta$  を (2) の複素数とする。点  $\alpha$  が (1) の直線上を動くとき、 $\frac{\beta}{\alpha}$  は一定であることを証明せよ。

10

イ

正の整数  $x$  と  $y$  が与えられたとき、以下の手順による計算を行う。

1.  $n \leftarrow x, \quad m \leftarrow y, \quad q \leftarrow 0$
2.  $m > 0$  かつ  $q \leq 2$  を満たしている限り、次の計算を繰り返し実行する。ただし、 $n$  を  $m$  で割った商を  $n \operatorname{div} m$ , 余りを  $n \operatorname{mod} m$  で表す。
  - 2-1.  $q \leftarrow n \operatorname{div} m, \quad r \leftarrow n \operatorname{mod} m$
  - 2-2.  $n \leftarrow m, \quad m \leftarrow r$
3.  $q > 2$  ならば 0 を、そうでなければ  $n$  の値を出力する。

この手順に関して、以下の問いに答えよ。

- (1)  $x$  を 95,  $y$  を 35 としたとき、手順 2 の各繰り返しにおいて 2-1 を実行する直前での変数  $n, m, q$  の値の変化を示す表を作成し、手順 3 で出力される数を示せ。
- (2) 変数  $n, m$  の値をそれぞれ  $x_2, x_1$  とし、その状態で 2-1 と 2-2 を続けて実行したところ、変数  $m, q$  の値がそれぞれ  $x_0, z$  になったとする。このとき、 $x_2$  を  $x_1, x_0, z$  を使って表せ。
- (3)  $x$  と  $y$  の両方が 200 以上でかつ出力が 7 になるような  $x$  と  $y$  を 1 組あげ、その組について (1) と同様の表を作成せよ。

10

ウ

2つの野球チーム A, B が繰り返し試合を行う。各試合において, A が勝つ確率を  $p$ , B が勝つ確率を  $q = 1 - p$  とする。ただし  $0 < p < 1$  とする。

- (1)  $p = \frac{1}{2}$  とする。A, B どちらかが 4 勝するまでに行う試合数を表す確率変数を  $X$  とする。 $X$  の確率分布を求めよ。
- (2) B より先に A が  $n$  勝する確率を  $P(n)$  とする。 $P(3)$  と  $P(4)$  の大小を比較せよ。







